المعادلات التفاضلية الكسرية من نوع لانجيفين مع بعض الشروط الحدودية الجديدة

مقدم من الطالبة

بلقيس سعود الغامدي

بحث مقدم لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

قسم الرياضيات , كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز

جدة-المملكة العربية السعودية

1441 - 2020م (تاريخ المناقشة)

بسم الله الرحمن الرحيم

معادلات لانجفن الكسرية بشروط حدية متعددة النقاط

مقدم من الطالبة

بلقيس سعود الغامدي

بحث مقدم لنيل درجة الماجستير في الرياضيات

إشراف

أ.د أحمد سالم الشريف و د. فارس الزهراني

قسم الرياضيات , كلية العلوم

جامعة الملك عبد العزيز

جدة-المملكة العربية السعودية

1441هـ - 2020م (تاريخ المناقشة)

معادلات لانجفن الكسرية بشروط حدية متعددة النقاط

بلقيس سعود الغامدي

تمت الموافقة على قبول هذه الرسالة استكمالاً لمتطلبات درجة الماجستير في الرياضيات

لجنة المناقشة والحكم على الرسالة

	الاسم	المرتبة العلمية	التخصص	التوقيع
عضو داخلي				
عضو خارجي				
مشرف مشارك				
مشرف رئيس				

جامعة الملك عبدالعزيز ١٤٤١هـ ٢٠٢٠م (.....)

ملخص الرسالة

ظهر حساب التفاضل والتكامل الكسري كمجال مهم في المجالات العلمية المتنوعة على سبيل المثال , ولكن ليس حصري , الفيزياء, الرياضيات, الكيمياء, والهندسة, الخ. المعادلات التفاضلية الكسرية جذبت ايضاً العديد من المؤلفين والباحثين في جميع التخصصات العلمية المختلفة مثل الهندسة والرياضيات والفيزياء و الكيمياء وما إلى ذلك. من اجل التطوير الحديث المشتقات الكسرية تعطي طريقة واضحة لوصف الذاكرة وسمة الوراثة للمواد والعمليات المختلفة. هذه الخصائص للمشتق الكسري جعل نماذج الترتيب الكسري اكثر منطقية وأصالة من نماذج ترتيب عدد صحيح, وعلى مدى السنوات القليلة الماضية ,استخدم حساب التفاضل الجزئي على نطاق واسع وعلى نحو متزايد في نمذجة العديد من النظم الفيزيائية والبيولوجية المعقدة.

تم اشتقاق معادلة *Langevin* التي صاغتها *Langevin* لأول مرة عام *1908* لتكون وسيلة مؤثرة لوصف تطور الظواهر الفيزيائية في البيئات المتقلبة [10]. كنمو قوي للمشتقات الكسرية ، تم تقديم معادلات *Langevin* العامة للأوامر الكسرية من قبل *Mainardi* و *Pironi* [*32*]. في الآونة الأخيرة ، تم إصدار مساهمات متنوعة تتعلق بوجود ووحدانية الحل لمعادلات*Langevin* المعممة ، انظر

[2, 6, 9, 14, 20-22, 26, 27, 30, 33, 39, 46, 48, 50, 52-55] . لقد قدموا معادلة *Langevin* الجزئية كحالة خاصة لمعادلة *Langevin* المعممة ، وللمرة الأولى مثلوا دالات ارتباط السرعة والإزاحة من حيث دالات *Mittag-Leffler*.

Eab و *Lim* *[12]* درسوا إمكانية تطبيق معادلة *Langevin* الكسرية للترتيب الموزع لنمذجة نشر ملف واحد ونشر الموجات فوق الصوتية.

أيضاً استخدموا معادلة *Langevin* الكسرية المعممة لنمذجة عمليات الانتشار الشاذة بما في ذلك الانتشار من نوع ملف واحد.

قدم *Sandev* وأخرون*[41,42]* تعبيرات عن الفروق ومتوسط الإزاحة المربعة لمعادلات *Langevin* الجزئية المعممة لجسيم حر يتمثل في وجود حالات الضوضاء الداخلية والخارجية. ناقشوا تطبيقه لنمذجة عمليات الانتشار الشاذة في الوسائط المعقدة بما في ذلك الظواهر المشابهة لنشر ملف واحد أو التعميمات المحتملة لها.

في الآونة الأخيرة ، تم نشر العديد من المساهمات التي تضع في اعتبارها نتائج الوجود ووحدانية الحل لمعادلات*Langevin* الجزئية المعممة. . انظر *[6,14,21,27,30,48,52{55][* والمراجع الواردة فيه.

Ahmad وآخرون[*46*] اكتشفوا وجود حل لقيمة الحدود غير ذات النقاط الثلاث .

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}+\lambda)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=0,u(1)=0,u(\eta)=0 \end{cases}$$

حيث أن ${}^{c}D^{\alpha}$ و ${}^{c}D^{\beta}$ يرمز إلى التفاضل الكسري من نوع ليوفيل كابوتو من الرتبة $0<\alpha\le 1$ و $1<\beta\le 2,\lambda\in\Re,0<\eta<1$, $f:[0,1]\times\Re\to\Re$ دالة متصلة.

Li وآخرون *[26]* حققوا في معادلة *Langevin* الكسرية مع شروط قيمة الحدود اللانهائية.

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}+\lambda)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(0)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\,{}^{c}D^{\alpha}u(\eta_i) \end{cases}$$

حيث أن ${}^{c}D^{\alpha}$ و ${}^{c}D^{\beta}$ يرمز إلى التفاضل الكسري من نوع ليوفيل كابوتو من الرتبة $0<\alpha\le 1$ و $1<\beta\le 2,\lambda\in\Re,0<\eta<1$, $\mu_i>0,0<\eta_1<\eta_2<\ldots<\eta_i<\ldots<1,i\in\mathrm{N}$, $f:[0,1]\times\Re\to\Re$ دالة متصلة .

تساهم نظريات النقطة الثابتة بدور كبير وعظيم في دراسة تفرد ووجود المعادلات التفاضلية والتكاملية والتكاملية. على الرغم من وجود عدد كبير من هذه النظريات ، ولكن تم تركيز عدد محدود منها من قبل المؤلفين في هذا المجال مثل *Krasnoselskii* ، ونظرية *Leray-Schauder*للبديل غير الخطي ،ونظرية مبدأ *Banach* التطبيقي للانكماش ونظرية *Leray-Schauder degree*. تعد نظرية *Krasnoselskii-Zabreiko* للنقطة الثابتة للخرائط الخطية غير المقاربة *[1, 24, 47]* واحدة من نظريات النقطة الثابتة التي تعطي نتائج مهمة ودقيقة في وجود حلول للمعادلات التفاضلية.غير أنها لم تلفت انتباه العديد من المؤلفين في تطبيقاتهم على نحو كاف*[23]* .

في الفصل الأول نقدم التعاريف المطلوبة للتكامل المعمم والاشتقاق والنتائج التحضيرية لإنجاز هذه الرسالة.

في الفصل الثاني ندرس وجود ووحدانية الحل لمعادلة *Langevin* التفاضلية الكسرية ذات رتبتين مختلفتين مرتبطة بشروط حدية من ثلاث نقاط .المسألة الأساسية معطاة بالشكل التالي:

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}+\lambda)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(0)=0,u(1)=\mu u(\eta) \end{cases}$$

حيث أن ${}^{c}D^{\alpha}$ و ${}^{c}D^{\beta}$ يرمز إلى التفاضل الكسري من نوع ليوفيل- كابوتو من الرتبة α.
$0<\alpha\le 1$, $1<\beta<2$ و $0<\eta<1$, $\lambda\in R$, $f:[0,1]\times R\to R$ دالة متصلة.

محتويات هذا الفصل تم ظهورها في المقالة البحثية:

"Langevin equation involving two fractional orders with three-point boundary conditions", Differential and Integral Equations, Vol.33(3-4) (2020) 163--180.

في الفصل الثالث تمت دراسة وجود ووحدانية الحل لمعادلة *Langevin* التفاضلية الكسرية ذات رتبتين مختلفتين مرتبطة بالشروط الحدية عكس الدورية وشروط حدية متعددة النقاط, وهذه المسألة معطاة بالنظام الآتي:

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}+\lambda)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)+u(1)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(0)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(1)=\sum_{i=1}^{m}\mu_i x(q_i) \end{cases}$$

حيث أن ${}^{c}D^{\alpha}$ و ${}^{c}D^{\beta}$ يرمز إلى التفاضل الكسري من نوع ليوفيل- كابوتو من الرتبة α.
$0<\alpha\le 1$, $\lambda\in R,$, $q_i\in(0,1), i=1,2,...,m, m\in \mathrm{N}$ و $f:[0,1]\times R\to R$ دالة متصلة.

محتويات هذا الفصل تم ظهورها في المقالة البحثية:

``*Multi-Point and Anti-Periodic Conditions for Generalized Langevin Equation with Two Fractional Orders", Fractal and Fractional , Vol.3(4) (2019) 51:1—14*

في الفصل الرابع ناقشنا وجود ووحدانية الحل لمعادلة *Langevin*التفاضلية الكسرية ذات رتبتين مختلفتين مرتبطة بشروط حدية شريطية متعددة وشروط حدية متعددة النقاط, والنظام معطى بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} {}^{c}D^{p}({}^{c}D^{q}+\lambda)=f(t,u(t),{}^{c}D^{r}x(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=0,{}^{c}D^{q}u(0)=0,u(1)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i x(\eta_i)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i\int_0^{\eta_i}x(s)ds \end{cases}$$

حيث أن ${}^{c}D^{q}$ و ${}^{c}D^{p}$ يرمز إلى التفاضل الكسري من نوع ليوفيل- كابوتو من الرتبة q . $0<q\le 1,1<p\le 2$ ، $\lambda\in R,$ ، $\beta_i,\alpha_i\in(0,1),i=1,2,...,m,m\in \mathrm{N}$ ،

و $f:[0,1]\times R\to R$ دالة متصلة.

محتويات هذا الفصل تم تقديمها للنشر.

Fractional Langevin equations with multi-point boundary conditions

Thesis Proposal for Master Degree

By: Balqees Saud Alghamdi

Student ID: 1700828

A thesis submitted for the requirements for a Master's degree in Mathematics

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING ABDULAZIZ UNIVERSITY

JEDDAH, SAUDI ARABIA
1441 H – 2020

Fractional Langevin equations with multi-point boundary conditions

Thesis Proposal for Master Degree

By: Balqees Saud Alghamdi

Student ID: 1700828

Supervisor: Prof. Dr. Ahmed Salem El-Sharif
Co-Supervisor: Dr. Faris S. Alzahrani

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
KING ABDULAZIZ UNIVERSITY
JEDDAH, SAUDI ARABIA
1441 H – 2020G

Fractional Langevin equations with multi-point boundary conditions

Thesis Proposal for Master Degree

By: Balqees Saud Alghamdi

Student ID: 1700828

This thesis has been approved and accepted in partial fulfillment of the requirements for a Master's degree in Mathematics

EXAMINATION COMMITTEE

	Name	Rank	Field	Signature
Internal Examiner				
External Examiner				
Co-Advisor				
Advisor				

KING ABDULAZIZ UNIVERSITY
1441 H – 2020 G (……)

Testimony

candidate's name : Balqees Saud Algamdi
The work is supervised by :
Supervisors
Prof. Dr. Ahmed Salem El-Sharif
Co-Supervisor
Dr. Faris S. Alzahrani

I completed the thesis to meet the partial requirement for a Master’s degree in Mathematic

Dedication

For all those who lighted my path, for all those who have accompanied me all the way to prepare my thesis with all of their love and support, with all of their concern and tenderness until ALLAH have awarded me finishing it, for my dear parents- my ideal in life, for my loving husband and I dedicate my thesis.

Hopping that they will be proud of me as I am.

Balqees Saud Algamdi.

Acknowledgement

I thank Almighty ALLAH Who gave me the strength and guided me to complete this thesis.

My heartiest gratitude to ALLAH Who blessed me with a generous family, a source of constant support and encouragement. I am more than thankful to my parents for their unforgettable help and constant praying for me at every stage of my life.

It is my pleasure to express my gratitude to my supervisors: Prof. Dr. Ahmed Salem El-Sharif and Dr. Faris S. Alzahrani for their constant efforts, generous encouragement and valuable suggestions.

Finally, I am highly indebted and grateful to my husband for his patience and constant encouragement, and I wish him all the best.

Balqees Saud Algamdi

Preface

Fractional calculus has appeared as an important area in a sundry scientific fields for instance, but not exclusive, physics, mathematics, chemistry, engineering, etc. Fractional differential equations also attracted many authors and researchers in all different scientific disciplines such as engineering, mathematics, physics, chemistry, etc.

For recent development. Fractional derivatives give a clear method for the description of memory and heredity characteristic of different materials and processes. These properties of the fractional derivative make the fractional order models more logical and authentic than the original integer order models. Over the past few years, fractional calculus has been used extensively and increasingly in the modeling of many complex physical and biological systems. This science may become the calculus of the 21st century.

The Langevin equation which have formulated at the first time by Langevin in 1908, has been derived to be an influential a way to characterize the evolution of physical phenomena in fluctuating environments[10]. As the powerful growth of fractional derivative, the generalized Langevin equations of fractional orders have been offered by Mainardi and Pironi [32]. At the recent times, sundry contributions involved about the existence and uniqueness of solution for generalized Langevin equations, have been issued, see[2, 6, 9, 14, 20-22, 26, 27, 30, 33, 39, 46, 48, 50, 52-55]and the references mentioned here.

They presented a fractional Langevin equation as a special case of a generalized Langevin equation, and for the first time represented the velocity and displacement correlation functions in terms of the Mittag-Leffler functions.

Eab and Lim [12] studied the possibility of application of fractional Langevin equation of distributed order for modeling single file diffusion and ultraslow diffusion. Also, they used fractional generalized Langevin equation to model anomalous diffusive processes including single file-type diffusion. Sandev et al[41,42]provided expressions for variances and mean squared displacement for fractional generalized Langevin equations for a free particle represented in the presence of the cases of internal and external noise. They discussed its application to model anomalous diffusive processes in complex media including phenomena similar to single file diffusion or possible generalizations thereof.

Recently, several contributions mindful with the uniqueness and existence results for fractional generalized Langevin equations, have been published, see [6,14,21,27,30,48,52-55]and the references given therein.

Ahmad et al [2] find out the existence of solution for three-point nonlocal boundary value problem

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}+\lambda)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=0,u(1)=0,u(\eta)=0 \end{cases}$$

where ${}^{c}D^{\alpha}$ *and* ${}^{c}D^{\beta}$ are the Caputo's fractional derivatives of orders $0<\alpha\leq 1$ and $f:[0,1]\times\Re\to\Re$ is a continuously differentiable function.

Li et al [26] investigated the following fractional Langevin equation with infinite-point boundary value conditions

$$\begin{cases} {}^{c}D^{\beta}({}^{c}D^{\alpha}+\lambda)=f(t,u(t)),t\in[0,1] \\ u(0)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(0)=0,{}^{c}D^{\alpha}u(1)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_i\,{}^{c}D^{\alpha}u(\eta_i) \end{cases}$$

Fixed point theorems contribute with a substantial and great role in the study of the uniqueness and existence of integral, differential and integro differential equations. Although there are a large number of these theorems, but a limited number of them have been focused by the authors in this area such as Krasnoselskii's, nonlinear alternative Leray-Schauder, Banach contraction principle and Leray-Schauder degree. Krasnoselskii-Zabreiko's fixed point theorem for asymptotically linear mappings is one of the immutable point theorems that give important and accurate results in the existence of solutions for differential equations. However, it did not adequately draw the attention of many authors in their applications. Of contributions that used Krasnoselskii-Zabreiko's fixed point theorem [1, 24, 47]and it is worth pointing out that this theorem was provided at the first time by [23].

In Chapter 1, we render requisite definitions of the generalized integral and derivative and preparatory results that are necessity to accomplish this paper.

In Chapter 2, we examine the existence and uniqueness of solution for generalized Langevin equation that has two distinct fractional orders with a three-point boundary value problem.

In Chapter 3, we investigate the existence and uniqueness of solutions for Langevin equation which has Caputo fractional derivatives of two different orders that has anti-periodic and a new class of multi-point boundary conditions.

In chapter 4, we discuss the existence and uniqueness of solution for generalized Langevin equation included two different order with multi-point and multi nonlocal integral conditions.